

05-04 Formules d'Euler et de Moivre

Propriété – Formules d'Euler

Pour tout réel θ , on a : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Remarques

Ces formules sont utiles pour **linéariser** les puissances de sinus et de cosinus, c'est-à-dire pour les écrire comme sommes de sinus et de cosinus.

Exemple

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)) \\ &= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)\end{aligned}$$

Propriété – Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n , on a : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Remarques

- La formule de Moivre est une autre façon d'écrire $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Elle permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en utilisant le binôme de Newton.

Exemple

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 \\ &= \cos^3(\theta) + 3i \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - i \sin^3(\theta)\end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta)$$

$$\text{et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta)$$

05-04 Applications**Application 1**

Soit un réel θ .

- a] Linéariser $\sin^3(\theta)$.
- b] Exprimer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Application 2

Soit un réel x de l'intervalle $]0 ; 2\pi[$. Soient $a = 1 + e^{ix}$ et $b = 1 - e^{ix}$.

1. Déterminer le module et un argument de a et b .
2. Montrer que $\frac{a}{b}$ est un imaginaire pur.

Application 3

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) \right)^n$ est un imaginaire pur.

Application 4

Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $z + \frac{1}{z}$ est réel.

Application 5

Déterminer une solution complexe de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^9 = 0$.

Application 6

Soit $c = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}$. Soient les points du plan complexe $S(c^2)$ et $T\left(\frac{1}{c}\right)$.

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. On a $c^2 = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$.
2. Pour tout entier naturel n on a $c^{3n} \in \mathbb{R}$.
3. Les points O, S et T sont alignés.
4. Pour tout entier naturel non nul n on a $|c| + |c^2| + \dots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. La solution de l'équation $z - i = i(z + 1)$ est $S = \{\sqrt{2}e^{i\pi/4}\}$.